Aufgabenkatalog Analysis – Sommersemester 2019
Aufgaben zum Thema **Polynomgleichungen** mit Lösungen
Dr. Anton Malevich, Leonard Bechtel, Julian Maas

Aufgabe 1 (2) *Mitternachtsformel*
Seien $a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$ beliebig.
Beweisen Sie folgende allgemeine Lösungsformel (insofern eine Lösung existent, also $b^2 \geq 4ac$) für quadratische Polynomgleichungen in den reellen Zahlen:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \tfrac{-b \,\pm\, \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Lösung.
Seien $a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$ beliebig. Sei außerdem $x \in \mathbb{R}$ beliebig, so gilt:
$ax^2 + bx + c = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + \dfrac{b}{a}x \left(+ \dfrac{b^2}{4a^2} - \dfrac{b^2}{4a^2} \right) + \dfrac{c}{a} = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{b^2}{4a^2} = \dfrac{b^2}{4a^2} - \dfrac{c}{a}$
$\Leftrightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a} \right)^2 = \dfrac{b^2}{4a^2} - \dfrac{c}{a}$
$\Leftrightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a} \right)^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$
$\Leftrightarrow x + \dfrac{b}{2a} = \pm\sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$
$\Leftrightarrow x + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{-b \,\pm\, \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\square$

Aufgabe 2 (3) *Polynomdivision*
Zeigen Sie, dass für jedes reelle Polynom $p \in \mathbb{R}[x]$ gilt:

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} : p(x_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k x_0^k = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists q \in \mathbb{R}[x] : p(x) = (x - x_0)q(x)$$

Aufgabe 3 (1) *Nullstellen reeller Polynome*
Ermitteln Sie alle reellen Nullstellen der folgenden Polynome:

a) $f_1(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$
b) $f_2(x) = 2x^3 - 3x^2 - 23x + 12$
c) $f_3(x) = x^3 + 4x^2 - 51x - 54$
d) $f_4(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$
e) $f_5(x) = x^4 - 4x^2 + 16$
f) $f_6(x) = x^4 - 20x^2 + 64$

Lösung.

a) Nullstellenmenge $N_1 = \{-2, 1, 4\}$.
Wenn wir nichts so kompliziertes wie den Satz von Cardano verwenden wollen, versuchen wir zunächst herauszufinden, ob die Funktion ganzzahlige Nullstellen um die 0 herum besitzt. Dabei ist das Lemma von Gauß aus der Zahlentheorie sehr hilfreich,

denn es besagt, wenn ein normiertes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ganzzahlige Nullstellen besitzt, so müssen diese Nullstellen Teiler des absoluten Gliedes des Polynoms (also hier Teiler der 8) sein. Durch testen findet man hier alle drei Nullstellen recht schnell, aber sagen wir, wir hätten zunächst nur $x_0 = 1$ als Nullstelle gefunden, so können wir durch Polynomdivision[1] von f_1 durch $(x-1)$ ein Polynom erzeugen, dass die restlichen Nullstellen mit f_1 gemeinsam hat.
$(x^3 - 3x^2 - 6x + 8) : (x-1) = x^2$

$$
\begin{array}{rrrrl}
(1x^3 & -3x^2 & -6x & +8) & : (x-1) = x^2 - 2x - 8 \\
-(1x^3 & -1x^2) & & & \\
\hline
 & -2x^2 & -6x & & \\
 & -(2x^2 & +2x) & & \\
\hline
 & & -8x & +8 & \\
 & & -(8x & +8) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Und über die in Aufgabe 1 bewiesene Lösungsformel findet man schnell die verbleibenden Nullstellen.

b) $N_2 = \left\{-3, \frac{1}{2}, 4\right\}$

c) $N_3 = \{-1, 6, 9\}$

d) $N_4 = \{-2, 0, 4\}$

e) $N_5 = \emptyset$ *Tipp:* Substituiere $z := x^2$.

f) $N_6 = \{\pm 2, \pm 4\}$

$\square$

Aufgabe 4 (3) *Die Formel von Cardano*
In dieser Aufgabe sollen Sie die Formel von Cardrano zur allgemeinen Lösung von Polynomgleichungen dritten Grades herleiten. Gehen Sie dazu wiefolgt vor:

i) Zeigen Sie zunächst, dass man allgemein Polynomgleichungen dritten Grades $(a \neq 0, b, c, d \in \mathbb{R})$:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

in die sogenannte *reduzierte Form* überführen kann

$$z^3 + pz + q = 0$$

mit reellen Zahlen $p, q \in \mathbb{R}$ und einer Substitution $x + \alpha = z(x) =: z$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

[1] Ein sehr nützliches Verfahren zur Durchführung von Polynomdivisionen ist übrigens das Horner-Schema. Recherche lohnt!

ii) Um nun diese Gleichung zu lösen wählt man allgemein den Ansatz

$$z = u + v.$$

Zeigen Sie, dass sich für u und v die Gleichungen

$$p = -3uv \qquad q = -(u^3 + v^3)$$

ergeben.
Tipp: Schauen Sie sich z^3 an un vergleichen Sie es mit der Ursprungsgleichung.

iii) Lösen Sie nun obiges Gleichungssystem

$$p = -3uv \qquad q = -(u^3 + v^3).$$

Tipp: Multiplizieren Sie die rechte Gleichung mit u^3.

Damit erhalten Sie die Lösungen für z und damit auch für x in der Ursprungsgleichung.

Aufgabe 5 (2) *Anwendung Cardano*
Betrachten Sie die Gleichung:

$$x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$$

i) Sei $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$.
Berechnen Sie $f(-4)$, $f(-2)$, $f(0)$ und $f(2)$. Skizzieren Sie den Graphen von f. Wie viele reelle Lösungen hat (1)?

Im Folgenden berechnen Sie die Nullstellen dieser Polynomfunktion.

ii) Bringen Sie f in die reduzierte Form (vgl. Aufgabe vorher "Formel von Cardano").

iii) Finden mit der Cardanischen Formel eine Lösung der reduzierten Form. Ihre Lösung sollte den Ausdruck $\sqrt[3]{1 + \frac{7}{3}\sqrt{-\frac{2}{3}}}$ enthalten.

iv) Vereinfachen Sie ihr Ergebnis aus iii). Welcher Lösung x von (1) entspricht diese Lösung?
Tipp: $\left(-1 + \sqrt{-\frac{2}{3}}\right)^3 = 1 + \frac{7}{3}\sqrt{-\frac{2}{3}}$

v) Bestimmen Sie nun die restlichen Nullstellen von f.